MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 12
22.1.2020

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Lösungsvorschlag-

1. Die gegebene Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{3\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 3\,x_2^2 + 6\,x_1 - 2\,x_2 + 1 = 0}_{(*)} \right\}$$

besitzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad c = 1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - (-1)^2 = (2-\lambda)(4-\lambda)$$

besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$; wegen

$$A - \lambda_1\,E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{II+I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2\,E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{II−I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top A P = D$. Mit der Variablentransformation $\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
(*) \iff & \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} P^\top A P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b^\top P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + c = 0 \\
\iff & \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0 \\
\iff & 2\,y_1^2 + 4\,y_2^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\,y_1 - \frac{8}{\sqrt{2}}\,y_2 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich weiter

$$\ldots \iff 2\left(y_1^2+\frac{2}{\sqrt{2}}y_1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)+4\left(y_2^2-\frac{2}{\sqrt{2}}y_2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)-1-2+1=0$$

$$\iff 2\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+4\left(y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=2$$

$$\iff \left(y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\left(y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1.$$

Die Variablentransformation $\boxed{\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}$ liefert nun weiter

$$\ldots \iff z_1^2+2\,z_2^2=1$$

$$\iff \frac{z_1^2}{1^2}+\frac{z_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=1,$$

die euklidische (metrische) Normalform einer Ellipse. Also ist Q eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Damit sind Q und die in Abhängigkeit vom Parameter $t\in\mathbb{R}$ gegebene Quadrik

$$Q_t=\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid \quad \underbrace{x_1^2+t\,x_2^2-2\,t\,x_2+t-1=0}_{(**)}\right\}$$

genau dann kongruent, wenn auch Q_t eine Ellipse mit den Hauptachsenabschnitten 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist; wegen

$$(**) \iff x_1^2+t\left(x_2^2-2\,x_2+1\right)=1 \iff x_1^2+t\,(x_2-1)^2=1,$$

mit der Variablentransformation $\boxed{\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ -1\end{pmatrix}}$ also

$$(**) \iff z_1^2+t\,z_2^2=1,$$

ist dies genau für $t=2$ der Fall.

Mit

$$Q'=\left\{\begin{pmatrix} w\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid z_1^2+2z_2^2=1\right\},$$

ist also $f_1(Q')=Q$ für die Bewegung

$$f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f_1\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=P\cdot\left[\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}$$

und $f_2(Q')=Q_2$ für die Bewegung

$$f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f_2\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0\\ -1\end{pmatrix}.$$

$$Q_2 \xleftarrow{f_2} Q' \xrightarrow{f_1} Q$$

Folglich bildet dann die Bewegung

$$h = f_1 \circ f_2^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

mit

$$h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f_1\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

die Ellipse Q_2 auf die Ellipse Q ab. h ist eine Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel $45°$ gefolgt von einer Parallelverschiebung mit dem Vektor $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

2. Wir bestimmen die affine Normalform der durch die Gleichung

$$x^2 + 2xy + (s+1)y^2 + 2x - (2s^2 - 2)y + 1 = 0 \qquad (*)$$

gegebenen Quadrik Q mit Hilfe quadratischer Ergänzung und der binomischen Formel.

[*Zunächst eine Vorüberlegung zum Typ: Es ist*

$$(*) \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}}_{A=A^T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -(2s^2-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

und $\det A = s + 1 - 1 = s$, *also*

$s > 0 \implies Q$ *Ellipse, Punkt oder* $\varnothing$

$s < 0 \implies Q$ *Hyperbel oder sich schneidendes Geradenpaar*

$s = 0 \implies Q$ *Parabel, paralleles Geradenpaar, Doppelgerade oder* $\varnothing$]

Es ist

$$\begin{aligned}
(*) &\iff x^2 + 2xy + 2x + (s+1)y^2 - (2s^2-2)y + 1 = 0 \\
&\iff x^2 + (2y+2)x + \left(\frac{2y+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2y+2}{2}\right)^2 + (s+1)y^2 - (2s^2-2)y + 1 = 0 \\
&\iff (x+y+1)^2 - (y+1)^2 + (s+1)y^2 - (2s^2-2)y + 1 = 0 \\
&\iff (x+y+1)^2 - y^2 - 2y - 1 + sy^2 + y^2 - 2s^2y + 2y + 1 = 0 \\
&\iff (x+y+1)^2 + sy^2 - 2s^2y = 0 \\
&\iff (x+y+1)^2 + s(y^2 - 2sy + s^2 - s^2) = 0 \\
&\iff (x+y+1)^2 + s(y-s)^2 - s^3 = 0 \\
&\iff (x+y+1)^2 + s(y-s)^2 = s^3 \qquad (+)
\end{aligned}$$

Wir treffen nun die folgende Fallunterscheidung:

1. Fall $\underline{s = 0}$: Dann ist

$$(+) \iff (x+y+1)^2 = 0$$

Die Variablentransformation $\binom{w}{z} = \binom{x+y+1}{y}$ liefert $w^2 = 0$, die affine Normalform einer **Doppelgerade**.

2. Fall $\underline{s > 0}$: Dann ist

$$\begin{aligned}
(+) &\iff \frac{1}{s^3}(x+y+1)^2 + \frac{1}{s^2}(y-s)^2 = 1 \\
&\iff \left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}x + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}y + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{s}y - 1\right)^2 = 1
\end{aligned}$$

Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}x + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}y + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{s}y - 1 \end{pmatrix}$ liefert $w^2 + z^2 = 1$, die affine Normalform einer **Ellipse**.

3. Fall $\underline{s < 0}$: Dann ist

$$\begin{aligned}
(+) \iff & \frac{1}{s^3}(x+y+1)^2 + \frac{1}{s^2}(y-s)^2 = 1 \\
\iff & -\frac{1}{(-s)^3}(x+y+1)^2 + \frac{1}{s^2}(y-s)^2 = 1 \\
\iff & -\Big(\frac{1}{(-s)^{\frac{3}{2}}}x + \frac{1}{(-s)^{\frac{3}{2}}}y + \frac{1}{(-s)^{\frac{3}{2}}}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{s}y - 1\Big)^2 = 1
\end{aligned}$$

Die Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s}y - 1 \\ \frac{1}{(-s)^{\frac{3}{2}}}x + \frac{1}{(-s)^{\frac{3}{2}}}y + \frac{1}{(-s)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$ liefert $w^2 - z^2 = 1$, die affine Normalform einer **Hyperbel**.

3. Wir zeigen, daß für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Q$ gilt, daß auch $\quad 2m - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Q, \quad$ also

$$\Big(2m - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big)^T \cdot A \cdot \Big(2m - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) + b^T \cdot \Big(2m - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) + c = 0.$$

Wir werden dabei verwenden, daß (beachte, daß $A = A^T$)

$$\begin{aligned}
&(1) \quad (x \;\; y)Am = ((x \;\; y) \cdot A \cdot m)^T = m^T A^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = m^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \text{da } \; (x \;\; y)Am \in \mathbb{R}. \\
&(2) \quad 2m^T A + b^T = (2A^T m)^T + b^T = (2A^T m + b)^T = (2Am + b)^T = (0 \;\; 0). \\
&(3) \quad A^T m = -\frac{1}{2}b, \qquad \text{weil } \;\; 2Am + b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&(4) \quad m^T \cdot b = (m^T \cdot b)^T = b^T \cdot m.
\end{aligned}$$

Nun ist für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Q$

$$\begin{aligned}
& \Big(2m - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big)^T \cdot A \cdot \Big(2m - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) + b^T \cdot \Big(2m - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) + c \\
= \; & 4m^T Am - 2m^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x\ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2(x\ y)Am + 2b^T m - b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \\
\overset{(1)}{=} \; & 4m^T Am - 4m^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x\ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2b^T m - b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \\
= \; & 4m^T Am - 4m^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2b^T m + \underbrace{(x\ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c}_{=0} \\
= \; & 4m^T Am + 2b^T m - 2(2m^T A + b^T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\overset{(2)}{=} \; & 4m^T Am + 2b^T m \\
\overset{(3)}{=} \; & 4m^T A\Big(-\frac{1}{2}b\Big) + 2b^T m \\
= \; & -2m^T b + 2b^T m \\
\overset{(4)}{=} \; & -2b^T m + 2b^T m = 0.
\end{aligned}$$

4. Sei $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ h(x) = Bx + b$, eine Affinität (also $B \in GL_2(\mathbb{R})$) mit $h(Q_1) = Q_2$. Sei $y \in Q_2$. Dann ist zu zeigen:

$$2h(m) - y \in Q_2.$$

Weil $y \in Q_2$ und $h(Q_1) = Q_2$, gibt es (genau) ein $x \in Q_1$ mit $h(x) = y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2h(m) - y &= 2h(m) - h(x) \\ &= 2(Bm + b) - (Bx + b) \\ &= 2Bm + 2b - Bx - b \\ &= 2Bm - Bx + b \\ &= B(2m - x) + b = h(2m - x). \end{aligned}$$

Da m Mittelpunkt von Q_1, ist $2m - x \in Q_1$, also $h(2m - x) \in Q_2$, also

$$2h(m) - y \in Q_2.$$